DIE HAUPTEPOCHEN DER ENTWICKLUNG DER NEUEREN MATHEMATIK.

REDE

GEHALTEN IN DER AULA DER UNIVERSITÄT ROSTOCK
AM 28. FEBRUAR 1902

VON

PROF. DR. OTTO STAUDE
ALS DERZEITIGEM REKTOR.

SONDERABDRUCK AUS DEM
„JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG". XI. BAND.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.
1902.

DIE HAUPTEPOCHEN DER ENTWICKLUNG DER NEUEREN MATHEMATIK.

REDE

GEHALTEN IN DER AULA DER UNIVERSITÄT ROSTOCK
AM 28. FEBRUAR 1902

VON

PROF. DR. OTTO STAUDE
ALS DERZEITIGEM REKTOR.

SONDERABDRUCK AUS DEM
„JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG". XI. BAND.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.
1902.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549202_0031

Hochansehnliche Festversammlung!

Der heutige Festtag ist dem Andenken des hochseligen Grofsherzogs Friedrich Franz II. gewidmet, der am 28. Februar 1823 in Ludwigslust geboren war.

Festtage sind hohen Warten vergleichbar, von denen wir das Auge über Thäler und Höhen, über Flüsse und Seen in weite Ferne hinausschweifen lassen. Wenn wir heute das Bildnis des erlauchten Fürsten mit frischem Grün bekränzen, so wandern gleichzeitig unsere Gedanken über die Fülle geschichtlicher Ereignisse hin, aus denen er hervorgewachsen ist, in die er führend eingegriffen hat, und die an seine 41jährige Regierungszeit sich angereiht haben. Wir gedenken seines gewaltigen Vorfahren, des Herzogs Johann Albrecht, der um die Mitte des 16. Jahrhunderts in Mecklenburg die Reformation zur Anerkennung gebracht hat; wir gedenken der grofsen Tage des deutschen Vaterlandes, in denen Friedrich Franz II. selbst an der Spitze seiner Truppen zu Kampf und Sieg gezogen ist; wir erinnern uns seines allzufrüh verstorbenen Sohnes, dessen Denkmal seit wenigen Monaten unsere Wallanlagen schmückt; wir gedenken der thatkräftigen Regentschaft des Herzogs Johann Albrecht und begrüfsen mit Segenswünschen unsern jugendlichen Herrn, der gleich seinem Grofsvater mit 19 Jahren die Zügel der Regierung in die Hand nahm.

Wenn gerade die Universität den Geburtstag Friedrich Franz' II. als regelmäfsigen Festtag begeht, so erfüllt sie damit eine Pflicht freudiger Dankbarkeit gegen den edlen Fürsten, der nicht nur als treuer Schutzherr über die Erhaltung der Universität gewacht hat, sondern auch nicht müde geworden ist, mit allen Kräften zum Aufblühen unserer akademischen Wissenschaften beizutragen.

So ist denn alljährlich eine dieser Wissenschaften mit der Aufgabe betraut, das Andenken Friedrich Franz' II. in akademischer Weise durch eine wissenschaftliche Betrachtung zu ehren.

Aber wie jede einzelne Wissenschaft ein unentbehrlicher Bestandteil des gesamten Organismus der Hochschule ist, so spricht gerade an solchem Festtage die einzelne auch im Namen und im Sinne der anderen. Wenn einer von uns Dozenten der Freude an seiner Fachwissenschaft Worte verleiht, so giebt er in begrenztem Rahmen die allgemeinen Empfindungen wieder, die uns alle bei unserem Eintritt in die Wissenschaft erfüllt und beseelt, die uns in der Arbeit für sie Kraft und Ausdauer gegeben haben. Die Freude an der Wissenschaft, die uns in Stunden stiller Arbeit von einander trennt, sie ist es auch, die uns untereinander, und die uns im Unterricht mit der studierenden Jugend verbindet.

In dieser Auffassung darf auch ich am heutigen Festtage der gesamten Universität zu dienen hoffen, wenngleich ich meine Ausführungen

auf meine Fachwissenschaft beschränke und in kurzen Zügen die Hauptepochen der Entwicklung der neueren Mathematik zu schildern versuche.

Das Mittelalter war für die Mathematik, wie für die Naturwissenschaften, deren Schwesterdisziplin sie ist, eine tote Zeit gewesen. Den ersten entscheidenden Anstofs zu einer kräftigen Entfaltung der mathematischen Wissenschaften gaben zwei Entdeckungen, die im 17. Jahrhundert innerhalb der beiden Nationen aufleuchteten, deren Wettkampf uns in der Folge noch öfters entgegentreten wird: Der französische Philosoph Descartes erfand im Jahre 1637 die sogenannte Koordinatenmethode der Geometrie, nnd der deutsche Philosoph Leibniz schuf im Jahre 1684 die Grundlagen der Differential- und Integralrechnung.

Aber die beiden Philosophen machten selbst keinen umfassenderen Gebrauch von ihren Entdeckungen; ja sie mochten wohl kaum ahnen, welche gewaltigen Werkzeuge sie der Wissenschaft in die Hand gegeben hatten. Erst im 18. Jahrhundert beginnt mit Leonhard Euler die thatsächliche Verwertung der Ideen von Descartes und Leibniz für die reine Mathematik, für die Astronomie und für die mathematische Physik; und die Durchführung dieses Erfolges charakterisiert die erste Epoche der neueren Mathematik.

Euler selbst ist weiteren Kreisen bekannt durch seine Briefe an eine deutsche Prinzessin. Er behandelt in diesen Briefen für eine Nichte Friedrich des Grofsen, der ihn 1741 an die Berliner Akademie berufen hatte, in mustergiltiger Klarheit die wichtigsten Fragen der Astronomie, Geographie, Physik und Philosophie. Unter den Fachgenossen aber ist Eulers Fleifs geradezu sprichwörtlich geworden. Euler hat mehr als 800 mathematische Schriften verfafst, darunter grofse mehrbändige Werke. Obwohl er in den 17 letzten Jahres seines Lebens, die er als Akademiker in St. Petersburg zubrachte, des Augenlichts beraubt war, arbeitete er unermüdlich schaffend bis an sein Ende. Auf dem Friedhof zu St. Petersburg spricht ein mächtiger Block von finnländischem Granit in der kurzen Inschrift: „Leonardo Eulero Academia Petropolitana“ aus, was er der Akademie gewesen war[1]).

In allen Gebieten der Mathematik war Euler in der That der erste und beinahe einzige seiner Zeit. Er wufste mit Meisterhand die von Descartes und Leibniz geschaffenen Werkzeuge zu vervollkommnen und ihre Leistungsfähigheit in den verschiedensten Gebieten zu erproben. So gelang es ihm, alle bedeutenderen Probleme zu lösen, welche die vereinzelten Mathematiker seiner Zeit beschäftigten.

Aber wie er sich in seinen Schriften noch meistens der lateinischen Gelehrtensprache bediente, so blieben dieselben auch sachlich das Eigentum weniger Auserwählter. Für eine allgemeine Blütezeit der Mathematik waren in Eulers Umgebung die Bedingungen nicht vorhanden.

Indessen sollten sie sich alsbald an anderer Stelle erfüllen. Es war die französische Revolutionszeit mit ihrem gesteigerten Geistesleben, mit ihren hochgespannten Anforderungen an Wissenschaft und Technik, von der eine

1) Vgl. Rudio, Schweizer öffentliche Vorträge, Band VIII, Heft 3, Basel 1884.

neue gewaltige Triebkraft ausging. In dieser stürmischen Zeit wurde die höhere Mathematik zum ersten Male in ihrem vollen Umfange und mit vollem Bewufstsein zu einem allgemeinen Werkzeug der Naturwissenschaft und Technik ausgebildet. Hatte Euler in Jahrzehnten stillen Schaffens dieser Entwicklung vorgearbeitet, so vollendete sich jetzt in kurzer Zeit mit überwältigender Notwendigkeit der Siegeszug der Koordinatenmethode von Descartes und der Differential- und Integralrechnung von Leibniz.

Gerade im Todesjahr Eulers 1783 siedelte Gaspard Monge von einer militärischen Provinzialschule, wo er als Lehrer gewirkt hatte, nach Paris über, einer Berufung zum Mitgliede der Akademie und zum Professor der Hydraulik folgend. In militärisch-technischen Arbeiten aufgewachsen, hatte er schon als Jüngling eine wichtige Aufgabe der Festungsbaukunst, das sogenannte Defilieren eines Festungswerkes, gelöst[1]). Dadurch war er auf die darstellende Geometrie geführt worden, die er in seinem ersten Hauptwerke im Jahre 1799 zu einem wissenschaftlichen System erhob. Zugleich befähigte ihn seine geometrische Schulung, die Anregungen Eulers in der Anwendung der Differentialrechnung auf die Geometrie mit glänzendem Erfolge aufzunehmen. In dieser Richtung lag seine berühmte Entdeckung der Krümmungslinien mit ihrer praktischen Verwertung für den Zuschnitt der Bausteine einfacher und gekreuzter Gewölbe, sowie für die Schattenschraffierung in der Radierkunst[2]).

Aber nicht nur in der Geometrie fanden die Koordinatenmethode von Descartes und die Differential- und Integralrechnung von Leibniz ihre Verwertung. Gerade der allgemeine Gebrauch der beiden Methoden in allen exakten Wissenschaften und ihrer Technik ist es, der dieser Epoche ihren Stempel aufdrückt.

So entstand 1788 das klassische Werk von Lagrange über die analytische Mechanik, welches die physikalischen Bewegungsvorgänge mittels der genannten Methoden erklärte. So entstand von 1796 an die Mechanik des Himmels von Laplace, die ebenso das gesamte System der kosmischen Bewegungen unter gesicherte mathematische Gesetze zwang. Zu derselben Zeit begründeten Prony die Anwendung der Mathematik auf die Maschinenkonstruktion, Puisant auf die Geländezeichnung, Fourier auf die Undulationsbewegungen der Physik[3]).

Neben diesen in die verschiedensten Gebiete der Naturwissenschaft und Technik eingreifenden Anwendungen der Mathematik entwickelte sich naturgemäfs auch das theoretische System der Differential- und Integralrechnung, die sogenannte Analysis, in mächtigen Schritten weiter. In diesem Sinne wirkte neben Lagrange gleichfalls in Paris Legendre. Beide begründeten vor allen die Theorie der sogenannten elliptischen Integrale[4]), für welche sich bei Euler und dem Italiener Fagnano nur die ersten Keime gefunden hatten.

Überhaupt vereinigte Paris um die Wende des Jahrhunderts eine so

---

1) Vgl. Haussner in Ostwalds Klassikern Nr. 117 S. 181, sowie die daselbst S. 187 angegebene Litteratur.

2) Monge, Géometrie descriptive, Paris 1798/9, S. 124.

3) Vgl. für die 1. Epoche Günther, Geschichte der unorganischen Naturwissenschaften im 19. Jahrhundert, Berlin 1901.

4) Vgl. Jacobi, Ges. Werke, 1. S. 9.

grofse Zahl hervorragender Mathematiker, wie niemals sonst an ein und derselben Stelle gewirkt hat. Die Pariser Akademie war auf dem Gebiete der Mathematik in Wirklichkeit, was sie sein wollte, der Brennpunkt aller wissenschaftlichen Bestrebungen Frankreichs und der übrigen Länder.

Zu gleicher Zeit drang die höhere Mathematik zum ersten Mal lebendig in weite Kreise hinein, nicht blofs dank der Bedeutung ihrer Meister, sondern auch infolge der zwingenden Notwendigkeit der äufseren Verhältnisse. Nach dem Untergang zahlreicher Schulen Frankreichs während der Revolution fehlte es überall an Lehrern und geistigen Arbeitskräften, besonders für die Technik des Krieges.

Da war es wieder der Geometer Monge, auf dessen Betreiben und nach dessen Plänen im Jahre 1795 die erste école polytechnique in Paris gegründet wurde, das Vorbild aller späteren polytechnischen Hochschulen. An dieser neuen Lehranstalt lehrte Monge vor allem seine darstellende Geometrie. In der Kirche der Sorbonne hatte er seine Zeichensäle eingerichtet; hier feierte die Technik dieses fruchtbaren Zweiges der Geometrie ihre ersten grofsen Triumphe. Neben Monge aber zogen die andern Meister, Lagrange und Laplace, einen immer wachsenden Kreis von Schülern heran, die bald selbständig in die Entwicklung der Wissenschaft eingriffen.

Infolgedessen entstand damals die erste mathematische Zeitschrift, das Journal de l'école polytechnique. Es erschien anfangs unter den Jahreszahlen der Revolution, die Autornamen mit dem gleichmäfsigen Titel Citoyen versehen, aber es hat die Stürme seiner Jugendzeit überstanden, hat sich später des besonderen Schutzes Napoléons I. erfreut und sich bis in das 19. Jahrhundert hinein als eines der hervorragendsten mathematischen Journale erhalten.

So erreichte im Anfange des 19. Jahrhunderts in Frankreich die erste Epoche der neueren Mathematik, während der die Methoden von Descartes und Leibniz ihre nirgends versagende Kraft bewährten und Analysis, Geometrie und Mechanik zu klassischen Systemen ausreifen liefsen, ihren Höhepunkt. Ein bestimmtes Schlufsjahr für diese Epoche möchte ich nicht angeben. Das *Πάντα ῥεῖ* des Heraklit gilt nirgends mehr als im Leben der Wissenschaft, und die Zeiten, wo es am meisten gilt, sind gewifs nicht die unfruchtbarsten.

Auch für die Mathematik konnte der Glanz der Pariser Blütezeit keinen Stillstand bedeuten. War doch durch den schnellen Fortschritt eine überreiche Menge von Thatsachen aufgehäuft worden. Unabweisbar machte sich das Bedürfnis nach allgemeinen, ordnenden Gesichtspunkten geltend, die in der Fülle der Einzelheiten die organischen Zusammenhänge aufzudecken vermöchten.

Hiermit war der zweiten Epoche der neueren Mathematik, die etwa die erste Hälfte des 19. Jahrhunderts umfafst, ihre Aufgabe gestellt.

Es war nur natürlich, dafs auch diese zweite Epoche in Paris einsetzte, dafs sie ihre Wurzeln in der Schule von Monge und Legendre, von Lagrange und Laplace haben mufste. Um aber ihre Entwicklung zu überblicken, müssen wir den Boden Frankreichs verlassen und uns dem übrigen Europa zuwenden.

Gegen das Ende des 18. Jahrhunderts, zu derselben Zeit, wo alle Kraft mathematischer Produktion sich in dem einzigen Paris sammelte und auf

Jahre hinaus die Vorherrschaft der französischen Mathematik begründet wurde, sah es im übrigen Europa sehr ärmlich aus. Nur in Italien wirkte ein kleiner Kreis begabter Mathematiker, wie Malfatti, Mascheroni, Plana, ohne indessen einen weitergehenden Einfluſs auszuüben. Deutschland aber wies nicht einen Namen auf, der auch nur ein Schatten von Eulers Namen hätte scheinen können[1]).

Indessen sollte diese dunkle Zeit deutscher Mathematik sich bald in ungeahnter Weise erhellen. Seit dem Anfange des 19. Jahrhunderts hob sich ein einziger Deutscher bereits mit seinen ersten Arbeiten unter seinen Zeitgenossen hervor, eines jener Genies, die keiner Schule bedürfen, die aus der Wiege das köstliche Gut geistiger Schöpfungskraft mühelos mitnehmen. Dies war Carl Friedrich Gauſs.

Obwohl auf einsamer Höhe wandelnd wurde er bald der angesehenste Mathematiker in Deutschland. Auch unsere Universität Rostock wandte sich an ihn um Rat wegen einer geeigneten Aufstellung ihrer astronomischen Instrumente, wie ich aus einem Briefe entnehme, den Gauſs unter dem 5. April 1833 an den damaligen Rektor Professor Dr. Strempel geschrieben hat. Der Brief trägt ein Siegel mit der Inschrift: Pauca, sed matura. Diese Worte sind für Gauſs in gewisser Weise charakteristisch. Wenn auch die Arbeiten, die er in einem Leben von 78 Jahren vollendete, schlieſslich eine stattliche Reihe von Bänden füllen, so ist doch jede von ihnen nach dem jeweiligen Stande der Wissenschaft vollständig ausgereift und von grundlegender Wichtigkeit.

Ein methodisches Prinzip von unabsehbarer Tragweite kennzeichnet bereits seine ersten Arbeiten, ein Prinzip, welches im Laufe des 19. Jahrhunderts eine völlige Umbildung der gesamten Analysis veranlassen und die Differential- und Integralrechnung zu der heute sogenannten Funktionentheorie vervollkommnen sollte. Dieses Prinzip ist die Verwendung der imaginären Zahlen.

Mit seiner Hilfe vermochte Gauſs eine Reihe bedeutender Probleme zum ersten Mal in voller Allgemeinheit zu lösen, so das Problem der Kreisteilung und das Problem der konformen Abbildung, das in seiner einfachsten Gestalt auf die Methoden der geographischen Kartenprojektion hinausläuft.

Bei allen seinen glänzenden theoretischen Untersuchungen verlor Gauſs niemals die praktischen Gesichtspunkte aus den Augen. Die Geodäsie, deren Methoden er vollständig erneuerte, übte er selbst als staatlich beauftragter Leiter der Landesvermessung in Hannover und Dänemark aus. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung benutzte er zur Grundlegung der Versicherungsrechnungen, seine Methode der kleinsten Quadrate zur Ausgleichungsrechnung der Beobachtungsfehler in physikalischen und astronomischen Messungen. Und das Denkmal, das ihm und seinem Freunde Weber in Göttingen errichtet ist, erinnert daran, daſs Gauſs zuerst mit jenem die Idee des elektrischen Telegraphen gehabt hat, der heute den ganzen Erdball umschlingt.

Was Euler für die erste Epoche unserer Entwicklung, das war Gauſs für die zweite Epoche. Beide Männer ragten weit empor über ihre Umgebung. Aber wenn Euler noch in naiver Schaffensfreudigkeit die That-

1) Vgl. Günther, a. a. O.

sachen entwickelte, Wichtiges und minder Wichtiges mit gleicher Sorgfalt darlegend, so tritt bei Gaufs unverkennbar das methodische Abwägen, das planmäfsige Bezwingen bestimmter Probleme in den Vordergrund. Die Wissenschaft war von Euler auf Gaufs um ein Jahrhundert reifer geworden.

Während Gaufs in Deutschland in den beiden ersten Dezennien des 19. Jahrhunderts noch ziemlich isoliert dastand, hatte die Pariser Schule in mannigfacher Wechselwirkung mit Gaufs auch ihrerseits die Überleitung zu den allgemeinen Prinzipien angebahnt.

Die imaginären Gröfsen verwertete Cauchy, um in ausgezeichneten Untersuchungen die neuere Funktionentheorie einzuleiten, während er gleichzeitig für die Algebra die formalen Methoden der sogenannten Determinanten einführte, durch die manche bisher unlösbare Aufgaben spielend erledigt wurden.

Neben Cauchy aber begannen die französischen Geometer Poncelet und Chasles aus der Schule von Monge bereits für die Geometrie die Prinzipien der Projektion und der Dualität auszubilden und die imaginären Gröfsen nutzbar zu machen.

Indessen erwachten gegenüber dem Pariser Zentrum zu derselben Zeit an ganz verschiedenen Stellen neue Kräfte, die im Verein mit Gaufs den Schwerpunkt der zweiten Epoche der neueren Mathematik nach Deutschland verlegen sollten.

Das Jahr 1826 ist der Markstein für diese Wandlung[1]). In diesem Jahre wurde in Berlin von Professor Crelle mit Unterstützung preufsischer Behörden die erste deutsche Zeitschrift für Mathematik gegründet. Das Crellesche Journal kam gerade zur rechten Zeit, um in seinen ersten Bänden die Namen der Männer zu vereinigen, die für unsere zweite Epoche charakteristisch sind. Neben Gaufs, Cauchy, Poncelet und Chasles, die schon genannt wurden, sind dies auf analytischem Gebiete Abel, Jacobi und Dirichlet, auf geometrischem Gebiete Möbius, Steiner und Plücker.

Im engen persönlichen Anschlufs an Crelle war es der Norweger Niels Henrik Abel, der mit seinen Arbeiten die ersten Bände des Crelleschen Journals schmückte und leider auch nur diese. Denn er starb bereits 1829 im Alter von 27 Jahren, als eben die preufsische Regierung auf Betreiben von Crelle mit ihm in Verbindung getreten war, um ihn für die Universität Berlin zu gewinnen[2]).

Von den Untersuchungen, die Abel in seinem kurzen Leben geliefert hat, greife ich nur zwei heraus, die eine über die Unauflösbarkeit der algebraischen Gleichungen höheren Grades und die andere über die später nach ihm benannten Abelschen Integrale, Untersuchungen, die an Kühnheit der Problemstellung und Neuheit der Resultate alles bisher Dagewesene in Schatten stellten und geradezu der Weiterentwicklung der Algebra und Analysis ihre weiteren Bahnen vorzeichneten.

Neben Abel ist noch des Franzosen Galois zu gedenken, der einen erfolgreichen Anfang machte, die algebraischen Entdeckungen Abels fort-

---

1) Vgl. Plücker, Ges. Werke 1 S. 9.
2) Journal für Mathematik IV (1830) S. 402.

zuführen, der aber ebenfalls frühzeitig der Wissenschaft entrissen wurde. Mit 21 Jahren fiel er 1832 in Paris einem Duell zum Opfer, nachdem er in der Nacht vor seinem Tode seine Entdeckungen einem Freunde zugestellt hatte mit der Bitte, sie an Gaufs und Jacobi zu übersenden[1]); ein Beweis, wie damals die Wertschätzung deutscher Mathematik sich zu heben begann.

In der That wetteiferte mit Abel auf dem Gebiete der Analysis Jacobi, der in Königsberg und später in Berlin lehrte. Im Anschlufs an Legendre, Gaufs und Cauchy erkannte er die Bedeutung der imaginären Gröfsen für die Theorie der elliptischen Funktionen, gestaltete die formalen Methoden Cauchys zu mächtigen Instrumenten der Algebra und Analysis aus und leitete in seiner Theorie der Differentialgleichungen eines der schwierigsten Kapitel des Leibnizschen Kalküls in systematische Bahnen[2]).

Zu gleicher Zeit mit Jacobi wirkte Dirichlet zuerst in Berlin und nachher in Göttingen. Er nahm die ersten Anläufe zu der kritischen Strenge der analytischen Methoden, die uns in der dritten Epoche wieder begegnen wird.

Jacobi und Dirichlet waren auch, ganz im Gegensatz zu Gaufs, die ersten deutschen Mathematiker, die eine eigentliche Lehrthätigkeit entfalteten, die ersten, die ihre eigenen Untersuchungen unmittelbar im Entstehen ihren Zuhörern mitzuteilen begannen.

Hierin kam ihnen die allmähliche Umgestaltung der Ziele der philosophischen Fakultäten zu Hilfe, die sich innerhalb unserer zweiten Epoche an den deutschen Universitäten vollzog[3]). Bis zum Anfange des 19. Jahrhunderts diente bekanntlich die philosophische Fakultät nur als Vorschule für die drei oberen Fakultäten, die theologische, juristische und medizinische. Zwar wurde durch ein Edikt vom 12. Juli 1810 in Preufsen das Examen pro facultate docendi eingeführt und damit zugleich die Ausbildung der künftigen Gymnasiallehrer von der theologischen auf die philosophische Fakultät übertragen, aber noch ohne jede Trennung der historisch-philologischen und der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer. Erst die Prüfungsordnung vom 20. April 1831 brachte eine entscheidende Wendung, indem wenigstens die fakultative Trennung der Examenfächer innerhalb der philosophischen Fakultät anerkannt, und damit zum ersten Mal der Boden für besondere fachwissenschaftliche Vorlesungen geebnet wurde.

Mit freudigem Erfolge griffen daher auch die Professoren der Mathematik, zuerst Jacobi und Dirichlet, die neue Gelegenheit auf, ihre akademischen Vorlesungen auf eine höhere Stufe zu erheben und sich dadurch selbst immer neue Anregung zu wissenschaftlicher Arbeit zu geben.

Von den drei deutschen Geometern, deren Namen sich an die Gründung des Crelleschen Journals anknüpfen, war Möbius in Leipzig der älteste und unabhängigste. Sein Hauptwerk: „Der barycentrische Kalkül“ erschien 1827, ein Jahr nach dem ersten Bande des Crelleschen Journals. Hier und in seinen folgenden Arbeiten begründete Möbius zuerst in weitem Umfange und in allen Einzelheiten die Theorie der geometrischen Verwandtschaften,

---

1) Journal de mathématiques (1) XI (1846) S. 415.
2) Vgl. Jacobi, Ges. Werke I, S. 3 ff.
3) Vgl. Stäckel, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Band XI, S. 28.

welche den inneren Zusammenhang der zahllosen geometrischen Einzelheiten und ihre Einordnung in natürliche Gruppen vermittelten.

Unabhängig von Möbius schuf Steiner in Berlin in seinem Hauptwerke „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten“ 1832 ein neues System der synthetischen Geometrie, welches in Anlehnung an Euklids Beweismethoden doch vollständig mit dem Aufbau des Euklidschen Systems brach und den Anstofs zur Begründung der neueren synthetisch-geometrischen Schule gab, als deren hervorragendste Vertreter noch heute Sturm in Breslau, Cremona in Rom und Reye in Strafsburg wirken. Ohne Formeln und ohne Figuren arbeitete Steiner lediglich mit einem aufs schärfste geschulten Anschauungsvermögen, welches ihm oft ohne Beweise die kühnsten geometrischen Folgerungen zu ziehen erlaubte. Der Grund, dafs er gerade in dieser eigenartigen Richtung sein Talent erprobte, ist vielleicht in dem Umstande zu suchen, dafs Steiner, ein geborener Schweizer, aus der Schule Pestalozzis hervorgegangen war[1]).

Ganz verschieden von Steiner entwickelte Plücker in Bonn gerade die Koordinatenmethode zu ganz neuer Gröfse. Hatte dieselbe im Laufe unserer ersten Epoche eine Fülle neuer Entdeckungen ermöglicht, so war dieses Werkzeug des Descartes doch auf einer Entwicklungsstufe stehen geblieben, die den Anforderungen der Zeit nicht mehr genügen konnte. Neben Steiners synthetischer Geometrie wäre vielleicht die analytische Geometrie untergegangen, wenn nicht Plücker durch eine fundamentale Umgestaltung den Koordinatenbegriff Descartes' für die neuen Zwecke geschickt und geradezu zum adäquaten Ausdruck der neuen Prinzipien der geometrischen Verwandtschaften gemacht hätte.

Unter dem Einflufs von Plücker standen auch die englischen Geometer Salmon und Cayley, die zugleich Cauchys formale Methoden der Algebra weiter entwickelten.

So war seit der Gründung des Crelleschen Journals Deutschland der Mittelpunkt mathematischer Forschung geworden, wenn auch in anderer Weise wie ehedem Frankreich.

Gegenüber der französischen Zentralisationsidee, die noch in dem Streben Napoleons I. zum Ausdruck kam, eine einzige französische Universität Paris mit abhängigen Tochterfakultäten in den Provinzialstädten herzustellen[2]), steht in Deutschland die selbständige und unabhängige Entfaltung der mathematischen Wissenschaften an den einzelnen Universitäten. Während in Paris besonders die technischen Interessen vorgeherrscht und im Aufblühen der polytechnischen Hochschule ihre Verkörperung gefunden hatten, waren es in Deutschland fast ausschliefslich die Universitäten, die zumal seit 1831 durch die freie Verfügung über ihre Lehrgebiete, unbeengt durch die Zwecke technischer Spezialschulung, die Pflanzstätten der mathematischen Wissenschaft geworden sind. Charakterisiert endlich der allgemeine Erfolg der Koordinatenmethode von Descartes und der Differential- und Integralrechnung von Leibniz den sachlichen Inhalt der ersten Epoche, so reiften während der zweiten Epoche in der Analysis das methodische Prinzip der

---

1) Vgl. F. Klein, Autograph. Vorles. über Geometrie 1 S. 78.

2) H. Schön, Die französischen Hochschulen seit der Revolution (nach Liard, L'enseignement supérieur en France 1789—1893) München 1896, S. 31.

imaginären Gröfsen, in der Algebra die alles durchdringenden formalen Methoden der Determinanten und Invarianten, in der Geometrie die grofsen Grundsätze der geometrischen Verwandtschaften, welche die scheinbar entlegensten Gebiete mit einander verschmolzen.

Es konnte nicht fehlen, dafs die neuen Methoden auch neue Thatsachen und neue Probleme mit sich brachten. Namentlich stand vor aller Augen als höchstes Ziel der Analysis das Umkehrproblem der Abelschen Integrale. Wohl war es von Abel und Jakobi formuliert worden, aber bis in die Mitte des 19. Jahrhunderts hinein trotzte es allen Bemühungen, die seiner fundamentalen Bedeutung wegen an seine Lösung gesetzt wurden.

Inzwischen waren die äufseren Bedingungen des wissenschaftlichen Verkehrs andere geworden. Auch die Mathematik war in das Zeichen des internationalen Wettkampfes eingetreten, der für die zweite Hälfte des 19. Jahrhunderts charakteristisch ist. Mathematische Zeitschriften waren in den meisten Ländern Europas, in Amerika und in Asien entstanden, und die höhere Mathematik wurde an allen Universitäten gelehrt. Der weitere Gesichtskreis und der schnelle Austausch neuer Erkenntnisse hatte den Blick geschärft. Die wissenschaftliche Kritik war, wie in anderen Wissenschaften, so auch in der Mathematik, eine durchdringendere und strengere geworden, und wir dürfen die dritte Epoche der neueren Mathematik, die von der Mitte bis zum Ende des 19. Jahrhunderts reicht, geradezu als die kritische[1]) Epoche bezeichnen.

In diesem Sinne steht an der Schwelle der dritten Epoche bereits Karl von Staudt in Erlangen, der die synthetische Geometrie Steiners auf neue unabhängige Grundlagen stellte und die imaginären Gröfsen auch in der synthetischen Geometrie zur Geltung brachte.

Aber auch Plückers analytische Geometrie fand ihre Weiterbildung und Verfeinerung durch Otto Hesse in Heidelberg, der durch seine meisterhafte Beherrschung der algebraischen Methoden die analytische Geometrie zu der Sicherheit und Formvollendung erhob, die wir heute von ihr verlangen.

In Berlin ragten durch ihre scharfsinnigen Untersuchungen auf dem Gebiete der Arithmetik und Algebra Kummer und Kronecker hervor.

In Frankreich stand im Vordergrund dieser Epoche der glänzende Name Charles Hermites. Er bahnte die kritische Entscheidung über das 2000jährige Problem der Quadratur des Zirkels an. Man hatte an der Lösung dieses Problems infolge zahlloser verfehlter Versuche derart verzweifelt, dafs die Pariser Akademie Arbeiten über dasselbe nicht mehr annahm. Dem Scharfsinn Hermites gelang es endlich, Licht in diese Frage zu bringen, freilich ohne sie vollständig zu erledigen. Aber Hermites Spuren folgend, erwarb sich der deutsche Mathematiker Lindemann, damals in Freiburg i. B., den Ruhm, nicht nur das Problem selbst, sondern zugleich eine unbegrenzte Anzahl von Problemen gleicher Schwierigkeit durch die Erkenntnis der allgemeinen Gesetze zu erledigen. Auch die Frage der Auflösung der algebraischen Gleichungen 5. Grades hat Hermite zugleich mit Kronecker und dem grofsen italienischen Mathematiker Brioschi

1) Vgl. die Epochen der Invariantentheorie bei Hilbert, Congress Mathematical Papers, vol. I, S. 124.

angebahnt, während sie in Deutschland von Felix Klein in glänzenden Untersuchungen vervollkommnet wurde[1]). Indessen an dem Umkehrproblem der Abelschen Integrale scheiterten selbst die Bemühungen Hermites.

Diejenigen beiden Männer, welche die Abelschen Integrale bezwingen sollten, und welche nicht nur durch die kritische Schärfe, sondern auch durch die Fruchtbarkeit und Vollendung ihrer Methoden die dritte Epoche von Anfang bis Ende beherrschen sollten, waren die beiden deutschen Mathematiker Bernhard Riemann und Karl Weierstrafs.

Die ganze heutige Funktionentheorie, die im Mittelpunkt der dritten Epoche steht und die in gewissem Sinne die kritisch vollendete Entwicklungsstufe der Leibnizschen Differential- und Integralrechnung darstellt, ist der Hauptsache nach eine Schöpfung dieser beiden Männer, die beide völlig verschieden in ihrem Lebensgang, in ihrer Arbeitsweise und in ihren Methoden, unabhängig von einander mit ihren Leistungen hervortraten und unstreitig die bedeutendsten Mathematiker der Welt in dieser dritten Epoche gewesen sind.

Riemann entwickelte sich, auf Anregungen von Gaufs fufsend, unter dessen Augen er in Göttingen promovierte und sich habilitierte[2]), sogleich in selbständiger und origineller Richtung. Schon seine Dissertation vom Jahre 1851, die eine an Cauchy, Gaufs und Dirichlet sich anschliefsende, übrigens durchaus neue Grundlegung der Funktionentheorie gab, erregte die gröfste Bewunderung des Altmeisters Gaufs, der damals am Ende seiner Lebensarbeit stand.

Vollständig neu und von gröfster Bedeutung war bei Riemann die Verbindung geometrischer Vorstellungen mit der Funktionentheorie. Hierauf gründet sich seine verhältnismäfsig kurze Arbeit über die Abelschen Funktionen, die 1857 in Crelles Journal erschien, wohl die inhaltsreichste Arbeit, die je eine mathematische Zeitschrift geziert hat. Sie löste das allgemeine Jacobi-Abelsche Umkehrproblem mit einem Schlage in allen seinen Teilen. Fast jeder einzelne Paragraph der Arbeit enthält eine ganze Theorie, die zu neuen Abhandlungen und Büchern Anlafs gab. Machte doch die ungewöhnliche Kürze und Knappheit der Darstellung bei der Neuheit und Schwierigkeit der Gegenstände die Lektüre der Riemannschen Arbeit selbst für den Mathematiker ungemein schwer.

Aber das Schicksal hätte Riemann auch nicht Zeit gelassen, sie breiter auszuführen. In Italien, wohin er wiederholt Gesundheit suchend gereist war, starb er zu Selasca am Lago maggiore im Alter von 40 Jahren.

Aber in Italien und Deutschland und weit über deren Grenzen lebt er fort, nicht nur in der Erinnerung an sein Schaffen, sondern in dem lebendigen Weiterblühen der fruchtbaren Ideen, die er der Wissenschaft hinterlassen hat.

Besonders Alfred Clebsch in Göttingen griff die neuen Resultate auf und verwertete sie in wichtigen geometrischen Untersuchungen. Aus seiner Anregung zu einer organischen Verbindung von Geometrie und Funktionstheorie ging eine ganze blühende Schule bedeutender Mathematiker

1) Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, Leipzig 1884.
2) Vgl. Riemann, Ges. Werke, S. 509 ff.

hervor, die besonders in Felix Klein in Göttingen ihren vielseitigen Vertreter gefunden hat.

Ganz anders in seiner Entwicklung als Riemann steht Weierstrafs[1]) da. Gegenüber dem raschen Leben von Riemann war ihm Zeit gegönnt, mit ruhiger Sicherheit zur Vollendung auszureifen.

Anfänglich dem Studium der Jurisprudenz obliegend, wandte er sich erst in späteren Semestern der Mathematik zu. Als Gymnasiallehrer in Braunsberg in Ostpreufsen begann er seine Arbeiten über die Abelschen Funktionen, die er in einem Braunsberger Gymnasialprogramm und im Crelleschen Journal in den Jahren 1849 bis 1856 teilweise veröffentlichte. Der Eindruck dieser Arbeiten war ein so gewaltiger, dafs Weierstrafs bereits im letztgenannten Jahre zum Professor an der Universität Berlin und im folgenden Jahre zum Mitglied der Akademie daselbst ernannt wurde.

In Weierstrafs erreichte die mathematische Wissenschaft der dritten Epoche ihre höchste Vollendung, ihre vollkommenste Reife. Er war nicht so vielseitig produktiv wie Euler und Gaufs; dafür waren die Zeiten vorüber; aber innerhalb der nicht engen Grenzen, die er sich gesteckt hatte, herrschte er mit unbedingter Sicherheit. Was er veröffentlichte, drang nicht blofs bis in die innersten Kernpunkte der Wissenschaft vor, sondern es war auch absolut fertig bis auf das kleinste formale Hilfsmittel. Da war kein Symbol, kein Buchstabe, der etwa noch durch einen geeigneteren hätte ersetzt werden können.

Die Arbeiten, die er herausgab, wie die Theorie der Abelschen Funktionen, die Zerlegung der ganzen transcendenten Funktionen in Primfunktionen, die Lehre von den Elementarteilern der Determinanten sind in ihrer Problemstellung und in ihrer Ausführung von überwältigender Gröfse.

Und doch geben sie nur einen sehr kleinen Teil seiner Geistesarbeit wieder. Was er in seinen Vorlesungen vortrug, war fast nur seine eigne Schöpfung. Mit geradezu verschwenderischer Hand streute er seinen Zuhörern seinen Gedankenreichtum aus, unbekümmert um den Ruhm der Priorität. Als Persönlichkeit ein einfacher, schlichter Gelehrter, ein väterlicher Freund seiner Schüler, hat er niemals nach äufserer Ehre getrachtet. Aber neidlos wurde er von allen Nationen der Erde, die überhaupt Mathematik zu ehren vermögen, als der gröfste Mathematiker anerkannt. Deutsche und Franzosen, Italiener und Schweden, Russen und Amerikaner scharten sich um seinen Lehrstuhl. In Stockholm wurde ein eigenes internationales Journal für die Weierstrafssche Schule unter dem Titel Acta mathematica gegründet.

Zur Direktion dieses Journals gehörte auch Sophie Kowalewska, die ihrem Lehrer Weierstrafs besonders nahe stand. Sie erhielt im Jahre 1888 mit der in den Acta mathematica[2]) veröffentlichten Schrift: Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe einen von der Pariser Akademie ausgesetzten Preis von 5000 Francs. Mit Recht. Denn die Arbeit lieferte eine Entdeckung für die Theorie der Bewegung eines starren Körpers, der sich nur zwei frühere von gleicher Be-

1) Vgl. E. Lampe, Gedächtnisrede auf Weierstrafs, gehalten in der physikalischen Gesellsch. zu Berlin am 5. März 1897. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. VI, 1; S. 27—44.

2) Bd. 12.

deutung an die Seite stellen liefsen, die eine von Euler und die andere von Poisson aus der französischen Glanzperiode.

Wie Riemann und Weierstrafs an der Schwelle der dritten Epoche gestanden hatten, so stand Weierstrafs auch unerreicht am Ende derselben, als er am 19. Februar 1897 im Alter von 83 Jahren starb.

Wenn auch die dritte Epoche noch zahlreiche bedeutende Namen aufweist, so will ich doch da abbrechen, wo noch pulsierendes Leben der Geschichte den Griffel aus der Hand wirft.

Gegenüber der zweiten Epoche, welche die allgemeinen systematischen Prinzipien schuf, haben wir die dritte Epoche als die kritische bezeichnet, nicht nur, weil sie die äufserste Strenge der Beweise im einzelnen erstreben und erreichen liefs, sondern auch, weil die Fundamente und der Aufbau des gesammten Systems der Mathematik in diesem Sinne durchmustert und gefestigt wurden. Diese kritische Richtung ist wesentlich auf deutschem Boden erwachsen und gereift. Deutsche Mathematik ist durch die ganze dritte Epoche die führende geblieben.

In demselben Paris, wo vor 100 Jahren die erste Epoche ihren Höhepunkt erreichte, hat im Jahre 1900 bei Gelegenheit des internationalen Mathematikerkongresses der deutsche Professor Hilbert[1]) aus Göttingen die Probleme bezeichnet, von deren Bearbeitung eine Förderung der Wissenschaft in der Zukunft sich erwarten läfst.

Aber auch für die Vergangenheit hat Deutschland die Leitung übernommen. Wir besitzen in dem von Cantor in Heidelberg verfafsten dreibändigen Werk über die Geschichte der Mathematik, der Lebensarbeit eines 70jährigen Gelehrten, ein Werk, dem an Vollständigkeit und Zuverlässigkeit kein zweites gleichkommt. Dafs dies Werk etwa da abschliefst, wo unsere erste Epoche beginnt, ist nicht zufällig. Es ist wohl nach menschlichen Kräften überhaupt unmöglich, dafs ein Einziger die kritische Sichtung der gesamten mathematischen Litteratur des 19. Jahrhunderts bewältigen kann.

Aber auch diese Schwierigkeit soll unter deutscher Führung überwunden werden. Vor dem Ende des 19. Jahrhunderts wurde die Deutsche Mathematiker-Vereinigung gegründet, der sich alsbald auch die bedeutendsten Mathematiker des Auslandes anschlossen. Von dieser ging besonders auf Betreiben von Professor Klein in Göttingen im Jahre 1896 die Anregung aus, in einer Encyklopädie die Geschichte der Mathematik im 19. Jahrhundert zusammenzufassen. An diesem Werke arbeiten seitdem zahlreiche Mathematiker fast aller Länder. Im Verlage von Teubner in Leipzig werden gleichzeitig die vier ersten Bände des sechsbändigen Werkes, eine Ausgabe in deutscher und eine in französischer Sprache, gedruckt.

So vereinigen sich unter deutscher Flagge am Anfange des 20. Jahrhunderts in diesem Friedenswerke die beiden Völker, die am meisten an dem Wettkampf der mathematischen Wissenschaften in den vergangenen Epochen beteiligt waren und die durch Descartes und Leibniz den Anstofs zu diesem Wettkampf gegeben hatten.

Zwar ist die Eigenart der Sprache für die Mathematik von unter-

---

1) Hilbert, Mathematische Probleme. Nachrichten der K. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen. Math. phys. Kl. 1900. Heft 3.

geordneter Bedeutung; die mathematischen Formeln und Symbole kommen sogar dem Ideal einer Weltsprache nahe und sind nicht an Nationen und politische Grenzen gebunden.

Aber in der Geschichte ist die Mathematik wie jede andere Wissenschaft durch unzählige Fäden mit den Schicksalen der Völker verknüpft, deren Sprachen sie redet. Und wie vor 400 Jahren unsere Universität Rostock den ersten Anstofs zum Gebrauche der deutschen Sprache in den akademischen Vorlesungen gegeben hat, so wird auch heute der deutsche Mathematiker so wenig, wie jeder andere deutsche Gelehrte seine Wissenschaft von seiner Sprache trennen wollen.

Das System der exakten Wissenschaft selbst hat keine Nationalität, aber wir, die wir die Wissenschaft pflegen und die deutsche Jugend in ihre lebendigen Werkstätten einführen sollen, wir stehen auf dem Boden eines Vaterlandes, dem zu dienen unser Stolz ist, eines Vaterlandes, dessen Ehre auch unsere Ehre ist.